Une propriété de type de Darboux dans les algèbres de von Neumann

Par GR. ARSENE et L. ZSIDÓ à Bucarest (Roumanie)

Dans [6] § IV, on a donné une nouvelle démonstration d'un théorème de plongement de SINAĬ en utilisant une propriété de type de Darboux de l'espérance conditionnelle d'une sous-tribu dans un espace mesuré.

Dans la présente Note, nous montrons que cette propriété est valable aussi pour l'espérance conditionnelle „non-commutative" définie dans [2] et [5] et on en donne quelques applications.

La terminologie concernant les algèbres de von Neumann est celle de [3] et la terminologie concernant la théorie de la mesure est celle de [1].

*

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann opérant dans un espace hilbertien H, φ une trace normale fidèle et finie sur $\mathscr{A}$ telle que $\varphi(I)=1$. Nous désignerons par $\mathscr{A}'$ le commutant de $\mathscr{A}$ et par $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ le centre de $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ un sous-algèbre de von Neumann et $T \in \mathscr{A}^+$. Posons $\varphi_T(S)=\varphi(TS)$ $(S \in \mathscr{A}_1)$. D'après le Lemme 14. 1 de [4] il existe un opérateur $E(T|\mathscr{A}_1) \in \mathscr{A}_1^+$ tel que

$$\varphi_T(S) = \varphi_{E(T|\mathscr{A}_1)}(S) \qquad (S \in \mathscr{A}_1).$$

Si $T \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, on a $E(T|\mathscr{A}_1) \in \mathfrak{z}(\mathscr{A}_1)$ (*cf.* th. 3, ch. I, § 6 de [3]).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $P_1, P_2 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ *des projecteurs,* $P_1 \leqq P_2$ *et* $T \in \mathscr{A}_1^+$. *Si* $E(P_1|\mathscr{A}_1) \leqq T \leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$, *il existe un projecteur* $P_0 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ *tel que*

(I) $$P_1 \leqq P_0 \leqq P_2 \quad et$$

(II) $$T - \varepsilon_0 I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T,$$

où ε_0 *est le plus petit nombre positif* ε *tel que pour tout projecteur* $Q \in \mathscr{A}$, $Q \leqq P_2 - P_1$, $Q \neq O$ *il existe un projecteur* $Q_1 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, $Q_1 \leqq Q$, $Q_1 \neq O$ *tel que* $E(Q_1|\mathscr{A}_1) \leqq \varepsilon I$. *Si, en outre* $P_1, P_2, Q_1 \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})$, *alors* $P_0 \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})$.

Démonstration. Notons $\mathscr{P}=\{P\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$; P projecteur, $P_1\leqq P\leqq P_2$ $E(P|\mathscr{A}_1)\leqq T\}$. Comme $P_1\in\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ n'est pas vide. Munnissons $\mathscr{P}$ de la relation d'ordre habituelle. Soit $\mathscr{S}$ une partie totalement ordonnée de $\mathscr{P}$. $\mathscr{S}$ est alors un ensemble filtrant croissant, majoré par I. Comme $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ est une algèbre de von Neumann, $S=\sup\mathscr{S}$ est un projecteur dans $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ avec $P_1\leqq S\leqq P_2$. Soit $\{S_\alpha\}\subset\mathscr{S}$ une suite généralisée croissante, telle que $\sup S_\alpha=S$. Alors $E(S_\alpha|\mathscr{A}_1)\nearrow$ $\nearrow E(S|\mathscr{A}_1)$, donc $E(S|\mathscr{A}_1)\leqq T$ et $S\in\mathscr{P}$. D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{P}$ possède un élément maximal P_0. Puisque $P_0\in\mathscr{P}$, on a $P_1\leqq P_0\leqq P_2$ et $E(P_0|\mathscr{A}_1)\leqq T$. Soit $\varepsilon>0$ tel que pour tout projecteur $Q\in\mathscr{A}$, $Q\neq 0$, $Q\leqq P_2-P_1$ il existe un projecteur $Q_1\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$, $Q_1\leqq Q$, $Q_1\neq O$ tel que $E(Q_1|\mathscr{A}_1)\leqq\varepsilon I$. Montrons que $T-\varepsilon I\leqq$ $\leqq E(P_0|\mathscr{A}_1)$. En effet, soit $T_1=E(P_0|\mathscr{A}_1)-T+\varepsilon I$; T_1 est alors un opérateur hermitien de $\mathscr{A}_1$. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il y a des projecteurs spectraux de T_1 avec $T_1F<O$. Soit alors F_0 le projecteur spectral de T_1, maximal avec la propriété $T_1F<O$. Puisque $P_2-P_0\in\mathscr{A}_1'$ et $F_0\in\mathscr{A}_1$, $F_1=F_0(P_2-P_0)$ est un projecteur de $\mathscr{A}_1$ et $F_1\leqq P_2-P_1$. Le projecteur F_0 permute avec T_1 et $E(P_0|\mathscr{A}_1)\in$ $\in\mathfrak{Z}(\mathscr{A}_1)$; donc F_0 permute avec T. Alors l'inégalité $T\leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$ implique

$$F_0T\leqq F_0E(P_2|\mathscr{A}_1) \tag{1}$$

Par définition

$$F_0E(P_0|\mathscr{A}_1)<F_0T-\varepsilon F_0. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) montrent que $F_0[E(P_2|\mathscr{A}_1)-E(P_0|\mathscr{A}_1)]>O$; mais la trace φ est fidèle et par consequent: $\varphi(F_1)=\varphi\big(F_0(P_2-P_0)\big)=\varphi\{F_0[(E(P_2|\mathscr{A}_1)-$ $-E(P_0|\mathscr{A}_1)]\}\neq 0$, donc $F_1\neq O$.

D'après l'hypotèse du théorème, il existe un projecteur $F_2\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}'$, $F_2\leqq F_1$, $F_2\neq O$ avec $E(F_2|\mathscr{A}_1)\leqq\varepsilon I$. Notons $Q=P_0+F_2$; alors Q est un projecteur parce que $P_0F_2=F_2P_0=O$; en outre $Q\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ et $P_1\leqq Q\leqq P_2$.

Pour $T,S\in\mathscr{A}$ on a $E\big(E(T|\mathscr{A}_1)S|\mathscr{A}_1\big)=E\big(TE(S|\mathscr{A}_1)|\mathscr{A}_1\big)=E(T|\mathscr{A}_1)E(S|\mathscr{A}_1)$

donc

$$(I-F_0)E(F_2|\mathscr{A}_1)=E(I-F_0|\mathscr{A}_1)E(F_2|\mathscr{A}_1)=E\big(E(I-F_0)|\mathscr{A}_1F_2|\mathscr{A}_1\big)=$$
$$=E\big((I-F_0)F_2|\mathscr{A}_1\big)=O$$

et

$$E(Q|\mathscr{A}_1)=E(P_0|\mathscr{A}_1)+E(F_2|\mathscr{A}_1)=$$
$$=F_0E(P_0|\mathscr{A}_1)+F_0E(F_2|\mathscr{A}_1)+(I-F_0)E(P_0|\mathscr{A}_1)+(I-F_0)E(F_2|\mathscr{A}_1)\leqq$$
$$\leqq F_0(T-\varepsilon I)+\varepsilon F_0+(I-F_0)T=T.$$

Mais $Q \in \mathscr{P}$ et $Q > P_0$ viennent en contradiction avec la maximalité de P_0. Il en résulte que $T_1 \geqq O$, donc

$$T - \varepsilon I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T.$$

Si ε_0 est le nombre dans l'énoncé du théorème, il existe une suite $\varepsilon_n \searrow \varepsilon_0$ telle que

$$T - \varepsilon_n I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T. \tag{3}$$

Passant à la limite dans (3) il résulte que

$$T - \varepsilon_0 I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T.$$

Pour la dernière assertion on considère dans $\mathscr{P}$ seulement des projecteurs de $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$. Q.E.D.

Corollaire 1. *Soient $P_1, P_2 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ des projecteurs et soit $T \in \mathscr{A}_1^+$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et $E(P_1|\mathscr{A}_1) \leqq T \leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$. Si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tous projecteurs $Q \in \mathscr{A}$, $Q \neq O$, $Q \leqq P_2 - P_1$, il existe un projecteur $Q_1 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, $Q_1 \neq O$, $Q_1 \leqq Q$ tel que $E(Q_1|\mathscr{A}_1) \leqq \varepsilon I$, alors il existe un projecteur $P_0 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ avec $E(P_0|\mathscr{A}_1) = T$.*

On applique le théorème pour $\varepsilon_0 = 0$.

Corollaire 2. *Si $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux, alors pour tous projecteurs $P_1, P_2 \in \mathscr{A}$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et pour tout $\Theta \in (\varphi(P_1), \varphi(P_2))$ il existe un projecteur $P_\Theta \in \mathscr{A}$ tel que $P_1 \leqq P_\Theta \leqq P_2$ et $\varphi(P_\Theta) = \Theta$.*

Démonstration. Si l'on prend $\mathscr{A}_1 = \{\lambda I_H\}$, alors $E(T|\mathscr{A}_1) = \varphi(T)I$ pour tout $T \in \mathscr{A}$. Soit $Q \in \mathscr{A}$ un projecteur, $Q \neq O$. Comme $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux il existe un projecteur $Q_1 \in \mathscr{A}$, $Q_1 \leqq Q$, $Q_1 \neq O$, $Q_1 \neq Q$. Alors $\varphi(Q_1) \leqq \frac{1}{2}\varphi(Q)$ ou $\varphi(Q - Q_1) \leqq \frac{1}{2}\varphi(Q)$. Donc les hypothèses du Corollaire 1 sont vérifiés pour $T = \Theta I$. Q.E.D.

Remarque. Si $\mathscr{A}$ est un facteur, l'inexistence des projecteurs minimaux est équivalente à la continuité du facteur.

Corollaire 3. *Soient Φ l'application canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ et P_1, P_2 des projecteurs de $\mathscr{A}$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et $T \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})^+$. Si $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux et $\Phi(P_1) \leqq T \leqq \Phi(P_2)$, il existe un projecteur $P_0 \in \mathscr{A}$ tel que $P_1 \leqq P_0 \leqq P_2$ et $\Phi(P_0) = T$.*

On applique le corollaire 2 pour $\Theta = \overline{\int}^* T\,d\mu$, où μ est la mesure pour laquelle l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ est isomorphe et isométrique avec $L^\infty(\mu)$.

L'adaptation du théorème et du Corollaire 1 dans le cas commutatif est immédiate; le Corollaire 2 exprime, dans le cas commutatif, la propriété de Darboux classique pour les mesures sans atomes.

Bibliographie

[1] N. Dinculeanu, *Vector measures* (London, 1967).
[2] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 9—39.
[3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (Paris, 1957).
[4] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, **57** (1963), 401—457.
[5] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, *Tohôku Math. J.*, **6** (1954), 177—181.
[6] L. Zsidó, Speranţe condiţionate şi teorema lui Sinai, *Studii cerc. mat.*, **20** (1968), 1045—1111.

(Reçu le 28. novembre 1968)